
Physik II

Sommersemester 2026

Lecture Notes

Inhaltsverzeichnis

1	Wellen	1
1.1	Harmonische Wellen	1
1.2	Superposition	4
1.3	Stehende Wellen	5
1.4	Dopplereffekt	5

Literatur

[1] Walny, Rainer: Wellenlehre, Elektrizität und Magnetismus. ETH Zürich, 2026

Physik II

Fynn Krebser—fkrebser@student.ethz.ch

Frühlingssemester 2026

Lec 1

1 Wellen

Um über Wellen zu sprechen, müssen wir zuerst auf eine Arbeitsdefinition einigen.

Definition 1.1: Welle

Eine **WELLE** ist eine zeitliche und räumliche Störung.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ einer Welle ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Störung ausbreitet. Damit Verbunden ist ein Energieübertrag aber KEIN Materietransport.

Eine Welle wird durch die Wellenfunktion $\xi(x, t)$ beschrieben, welche die Auslenkung des Oszillators um die Ruhelage bei Ort x und Zeit t angibt.

Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, in welche Richtung eine Auslenkung stattfinden kann: Senkrecht zur Ausbreitungsrichtung **TRANSVERSAL** oder parallel zur Ausbreitungsrichtung **LONGITUDINAL**.

Wenn wir uns eine Welle als Feder-Masse System vorstellen, dann schwingt jede Masse um ihre Ruhelage und kehrt schliesslich in ihre Ruhelage zurück.

Eine Welle kann auf zwei Arten dargestellt werden: Einmal in einem ξ - x Diagramm, welches die Auslenkung ξ als Funktion des Ortes x zu einem festen Zeitpunkt t zeigt, oder in einem ξ - t Diagramm, welches die Auslenkung ξ als Funktion der Zeit t an einem festen Ort x zeigt.

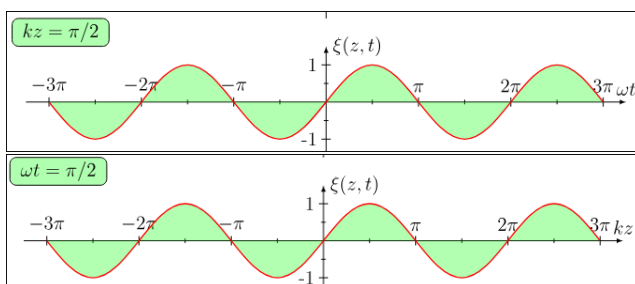


Abbildung 1: Oben: ξ - x Diagramm, Unten: ξ - t Diagramm

Üblicherweise verändert sich die Form eines Wellenberges mit der Zeit, dies wird **DISPERSION** genannt. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass dies nicht passiert, also dass wir

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt),$$

schreiben können. Hierbei zeigt das Minuszeichen dass die Welle nach Rechts geht und das bei Pluszeichen die Welle nach Links geht.

Proof. Wir gehen in ein Inertialsystem Σ' welches sich mit dem Wellenberg fortbewegt. In diesem System ist die Welle stationär, also

$\xi(x', t') = f(x')$. Anwendung der Galilei-Transformation $x' = x - vt$ und $t' = t$ ergibt die Behauptung. $\square$

In obiger Formel ist v sowohl die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle als auch die **PHASENGESCHWINDIGKEIT**.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt ab vom Massenbelag sowie der Rückstellkraft der Feder. Die Phasengeschwindigkeit beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellenberge fortbewegen. Wir nennen $x \mp vt$ die **PHASE** δ_0 der Welle. Sei x die Koordinate des Wellenberges zur Zeit t . Nehmen wir nun an, dass die Phase δ_0 konstant bleibt, also $\delta_0 = x \mp vt = \text{const}$, so folgt durch Ableiten $\dot{x} = v$. Dies motiviert dass die Phasengeschwindigkeit v der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle entspricht.

1.1 Harmonische Wellen

Der Spezialfall einer Harmonischen Welle ist gegeben durch

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin[k(x \pm vt)].$$

Hierbei wird k als **WELLENZAHL** bezeichnet. In dieser Situation vollführt jeder Oszillator eine harmonische Schwingung aus. Weiter definieren wir die **WELLENLÄNGE** λ als den Abstand zwischen zwei Oszillatoren gleicher Phase, also

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Lec 2

Proof. ObdA können wir die Welle bei $t = 0$ betrachten, also $\xi(x, 0) = \xi_0 \sin(kx)$. Nach der Definition der Wellenlänge muss $k(x + \lambda) = kx + 2\pi$ gelten, was die obige Formel für λ ergibt. $\square$

Betrachten wir nun die Welle bei $t = 0$, also ist

$$\xi(x', t_0 = 0) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{x'}{\lambda}\right).$$

Wenn wir nun die Welle verschieben, können wir $x' = x \pm vt$ einsetzen und erhalten

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{x \pm vt}{\lambda}\right) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} \pm \frac{2\pi v}{\lambda} t\right).$$

Nehmen wir nun das spezielle $x = \lambda$, so erhalten wir

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi T} = \frac{\omega}{k}.$$

Setzen wir nun $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ein so erhalten wir

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t).$$

Um die Formel zu verallgemeinern fügen wir den **NULL-PHASENWINKEL** φ_0 hinzu und erhalten

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi_0).$$

Leiten wir die Phase ab, so erhalten wir als Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{d}{dt}(kx \pm \omega t + \varphi_0) = \frac{\omega}{k}.$$

Um Rechnungen zu vereinfachen, können wir die komplexe Darstellung der Welle verwenden, also

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{i(kx \pm \omega t + \varphi_0)}.$$

Dabei entspricht die reale Komponente der komplexen Darstellung der Welle der ursprünglichen Welle.

Wenn wir zwei Oszillatoren betrachten, welche sich bei x_1 und x_2 befinden, so beträgt die Phasendifferenz

$$\Delta\varphi = k\Delta x > 0 \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = k\dot{x} = kv.$$

Theorem 1.2: Wellengleichung

Eine Wellengleichung wird beschrieben durch

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Proof. Wir betrachten die Wellengleichung welche in positive x -Richtung läuft, also

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t).$$

Leiten wir dies zweimal nach der Zeit ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t).$$

Leiten wir die Ursprüngliche Welle zweimal nach x ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\xi_0 k^2 \sin(kx - \omega t).$$

Wir bemerken nun, dass

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

□

Hierbei sollten die Lösungen der Wellengleichung 2 mal stetig differenzierbar sein.

Theorem 1.3: Lösung der Wellengleichung

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist gegeben durch

$$\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt).$$

Der erste Term beschreibt eine Welle welche sich in positive x -Richtung bewegt, während der zweite Term eine Welle beschreibt welche sich in negative x -Richtung bewegt.

Beispiele beinhalten die Seilwelle, die Schallwelle, aber auch die elektromagnetische Welle.

Kehren wir zu transversalen Wellen zurück. Hierbei ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ senkrecht zur Auslenkung ξ .

$$\vec{\xi}(z, t) = \vec{A}f(z - vt).$$

Explizit könne wir schreiben

$$\vec{\xi}(z, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t).$$

Wir wollen nun das Beispiel der transversalen Seilwelle betrachten. Von was, hängt $\vec{v}$ ab?.

INPUT PICTURE

Wir betrachten das Seil an den Punkten x und $x + dx$.

Zunächst definieren wir die **ZUGSPANNUNG** $\vec{S} = \frac{\vec{F}}{A}$, welche die Kraft pro Querschnittsfläche beschreibt.

Der Betrag der Spannung im Seil muss überall gleich sein, da sonst das Seil an der Stelle mit der grössten Spannung reissen würde. Weiter nehmen wir an, dass dm in Ruhe bleibt.

$$\Delta S_x = S \cos(\alpha') - S \cos(\alpha) \approx 0$$

$$\Delta S_y = S \sin(\alpha') - S \sin(\alpha).$$

Für den Tangens finden wir

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \quad \tan(\alpha') = \frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x}.$$

Da $\sin \approx \tan$ für kleine Winkel gilt, können wir schreiben

$$\Delta S_y = S \left(\frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right) = S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

Verwenden wir nun $dS_y \cdot A = dma_y$, so erhalten wir schliesslich die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Folglich ist

$$v = \pm \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \pm \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Wobei μ der lineare **MASSENBELAG** ist, also die Masse pro Länge.

Wir wollen unsere Konzepte nun auf mehrere Dimensionen erweitern. Zunächst auf Ebene Wellen. Die Wellenzahl wird neu zum **WELLENVEKTOR** $\vec{k}$, welcher die Richtung der Ausbreitung der Welle angibt. Die Phase wird neu zu $\delta = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$.

Folglich wird die harmonische Welle beschrieben durch

$$\xi(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Definition 1.4: Ebene Welle

Der Geometrische Ort von Oszillatoren gleicher Phase ist eine Ebene senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit. Weiter ist $\vec{v} \parallel \vec{k}$.

Diese Ebenen werden **WELLENFRONTEN** oder **PHASENFLÄCHEN** genannt.

Lec 3

Für eine ebene Harmonische Welle gilt die Wellengleichung

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Betrachten wir nun Zwei Punkte $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ in einer Ebene. Also $P_1, P_2 \in E \perp \vec{k}$. Da sie in Phase sind, gilt

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \omega t = \vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \omega t \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0.$$

Dies zeigt, dass $\vec{k} \perp E$ gilt, also dass die Wellenfronten Ebenen sind welche senkrecht zum Wellenvektor stehen.

Wir verwenden im folgenden die Konvention, dass

$$r_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Für eine ebene transversale Welle gilt

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

ObdA können wir dies vereinfachen zu

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\Delta\delta} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Definition 1.5: lineare Polarisation

Wenn $\Delta\delta = 0$ oder π gilt, so ist die Welle linear polarisiert.

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Definition 1.6: zirkulare Polarisation

Wenn $\Delta\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ gilt, und $A_x = A_y$ gilt, so ist die Welle zirkular polarisiert.

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = A \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Bei positivem Vorzeichen wird die Welle zB bei $z = 0$ zu

$$\vec{\xi}(z = 0, t) = A_0 \cos(\omega t) \hat{x} + A_0 \sin(\omega t) \hat{y}.$$

Bei negativem Vorzeichen wird die Welle zu

$$\vec{\xi}(z = 0, t) = A_0 \cos(\omega t) \hat{x} - A_0 \sin(\omega t) \hat{y}.$$

Wir nennen die Welle **RECHTSZIRKULAR** wenn $\Delta\delta = +\frac{\pi}{2}$ gilt, und **LINKSZIRKULAR** wenn $\Delta\delta = -\frac{\pi}{2}$ gilt.

Der allgemeine Fall ist die elliptische Polarisation, bei welchem sich die Spitze des Auslenkungsvektors auf einer Ellipse bewegt.

Im Raum, verallgemeinert sich die Wellengleichung wie folgt

Definition 1.7: Wellengleichung im Raum

Eine Wellengleichung im Raum wird beschrieben durch

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \xi = 0.$$

In Kugelkoordinaten wird die Wellengleichung zu (im Fall von radialsymmetrischen Wellen)

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \xi.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch¹

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{A}_1}{r} f_1(kr - \omega t) + \frac{\vec{A}_2}{r} f_2(kr + \omega t).$$

¹In 2 Dimensionen wäre die Amplitude proportional zu $\frac{1}{\sqrt{r}}$

Gehen wir nun zurück zum eindimensionalen Fall mit einer transversalen Welle. Die Geschwindigkeit eines einzelnen Oszillators ist gegeben durch

$$v_\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Die kinetische Energie eines Massenelements dm ist gegeben durch

$$dT = \frac{1}{2} v^2 dm.$$

Einsetzen von $dm = \rho dV$ gibt

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2.$$

Dies ist die kinetische Energiedichte der Welle. Sie gibt an wie viel kinetische Energie pro Volumen in der Welle gespeichert ist.

Für die elastische Energiedichte haben wir eine elongierte Feder, welche die Längenänderung

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\xi^2} - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Folglich ist die elastische Energiedichte

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2.$$

Wie teilt sich nun die Energie auf die beiden Freiheitsgrade auf? Es gilt für eine Welle

$$\xi(x, t) = f(x - vt).$$

Folglich können wir rechnen

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = -v \frac{\partial f}{\partial (x - vt)}.$$

Ebenso können wir rechnen

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = v \frac{\partial f}{\partial (x - vt)}.$$

$$\frac{dW}{dV} = \frac{dT}{dV} + \frac{dE_{el}}{dV} = \rho v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial (x - vt)} \right)^2.$$

Lec 4

Diese Gleichung gilt nur für mechanische Wellen. Wir fassen zusammen:

Tabelle 1: Mechanische Wellen

Typ	Ausbreitungsgeschwindigkeit
Seilwelle	$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$
Welle im Festkörper	$v_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
	$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$
Schallwelle	$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$
	$\kappa = \chi P$

Wir möchten nun über die Intensität I und die Energiefussdicht $\vec{S}$ einer Welle sprechen, wobei $|\vec{S}| = I$ gilt.

Als Beispiel nehmen wir eine harmonisch Fortschreitende Welle

$$\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad v = \frac{\omega}{k}.$$

Die Energiedichte ist wie vorher berechnet gegeben durch

$$\frac{dW}{dV} = \rho v^2 \xi'^2.$$

Wobei $\xi' = \frac{\partial f}{\partial(x-vt)} = k \frac{\partial \xi}{\partial(x-vt)}$. Wenn wir dies ausrechnen, so erhalten wir

$$\frac{dW}{dV} = \rho v^2 k^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) = A^2 \rho \omega^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

Dies hat auch eine Form von $f(x - vt)$. Also wird Energie transportiert bei einem Wellenphänomen. Jedoch ist die Energiedichte positiv definit. Weiter ist die Energie proportional zu A^2 und ω^2 .

Das zeitliche Mittel der Energiedichte ist gegeben durch

$$\langle \frac{dW}{dV} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dV} dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2.$$

Die Intensität ist nun Definiert als die Leistung, welche durch eine Fläche A senkrecht zur Ausbreitungsrichtung transportiert wird, pro Flächeneinheit. Also

$$I = \frac{d^2W}{dadt}.$$

Umformen gibt

$$\begin{aligned} I &= \frac{d^2W}{dadx \frac{dt}{dx}} \\ &= \frac{dW}{dV} v \end{aligned}$$

wobei wir ein wenig schludern und das d^2W durch dW ersetzen, lol.

Eine weitere legitime Frage ist was passiert wenn wir eine komplizierte Oberfläche haben. In diesem Fall definieren wir den **POYNTING VEKTOR** $\vec{S}$, welcher die Stärke von I hat und die Richtung von k . Dann gilt

$$\frac{dW}{dt} = \iint_A \vec{S} \cdot d\vec{a}.$$

Für eine Kugelwelle mit Oberfläche einer Kugel mit Radius r sehen wir, dass

$$\dot{W} = 2\pi \rho \omega^2 A_0^2 v.$$

Somit hängt die Leistung nicht von r ab, was die Energieerhaltung bestätigt.

1.2 Superposition

Wenn ξ_1 und ξ_2 Lösungen der Wellengleichung sind, so ist auch $\xi = \xi_1 + \xi_2$ eine Lösung der Wellengleichung. Dies wird als Superposition bezeichnet.

Betrachten wir zunächst die Überlagerung zweier harmonischen Wellen in einem eindimensionalen Raum.

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) &= A \cos(kx - \omega t) \\ \xi_2(x, t) &= A \cos(kx \mp \omega t + \delta). \end{aligned}$$

Im ersten Fall betrachten wir, wenn beide Wellen in die gleiche Richtung laufen. Ausserdem seien der Einfachheit die Amplituden gleich. Dann können wir rechnen

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_1 + \xi_2 \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \delta) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Amplitude maximal ist, wenn $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ gilt, und dass die Amplitude minimal (gleich null) ist, wenn $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ gilt. Dies wird als **KONSTRUKTIVE INTERFERENZ** bzw **DESTRUKTIVE INTERFERENZ** bezeichnet.

Wenn die Wellen gegenläufig laufen, so können wir rechnen

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_1 + \xi_2 \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t + \delta) \\ &= 2A \sin\left(kx + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Wenn wir nun zwei Wellen haben, welche von einem Punkt Q_1 und Q_2 ausgehen, so gilt an einem Punkt P :

$$\xi(x, t) = A(\sin(kx_1 - \omega t) + \sin(kx_2 - \omega t + \delta)).$$

Wir definieren den **GANGUNTERSCHIED** Δx als

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Wenn wir nun $x := x_1$ und $x + \Delta x := x_2$ setzen, so können wir rechnen

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A(\sin(kx - \omega t) + \sin(k(x + \Delta x) - \omega t + \delta)) \\ &= 2A \cos\left(\frac{k\Delta x + \delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{k\Delta x + \delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Konstruktive Interferenz tritt auf, wenn $k\Delta x + \delta = 2\pi n$ gilt, also wenn

$$\Delta x = \frac{2\pi n - \delta}{k} = n\lambda - \frac{\delta}{k}.$$

Destruktive Interferenz tritt auf, wenn $k\Delta x + \delta = (2n+1)\pi$ gilt, also wenn

$$\Delta x = \frac{(2n+1)\pi - \delta}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda - \frac{\delta}{k}.$$

Damit Interferenz überhaupt stattfinden kann, müssen die zeitliche und räumliche Kohärenz gegeben sein. Die zeitliche Kohärenz bedeutet, dass der Nullphasenwinkel δ konstant bleibt, also dass die Wellen eine feste Phasendifferenz haben. Die räumliche Kohärenz bedeutet, dass die Wellen überhaupt eine Chance haben zu interferieren, also dass die Wellenfronten sich überlappen.

Wenn eine Welle auf ein Hindernis trifft, wird sie reflektiert. Dabei wird unterschieden zwischen einem fixen und offenen Ende. Bei einem fixen Ende wird die Welle mit einem Phasenunterschied von π reflektiert. Bei einem offenen Ende wird die Welle ohne Phasenunterschied reflektiert.

Wenn eine Welle nun aber auf so eine Grenzfläche trifft, so wird sie nicht nur reflektiert, sondern auch transmittiert,

also durchgelassen. Dies kann in einem Seil zum Beispiel durch eine Änderung des Massenbelags realisiert werden.

Folglich existieren 3 Wellen.

$$\begin{aligned}\xi_A &= A \exp(i(k_1x - \omega t)) \\ \xi_R &= R \exp(i(-k_1x - \omega t + \delta_R)) \\ \xi_T &= T \exp(i(k_2x - \omega t + \delta_T)).\end{aligned}$$

Eine Sinnvolle Annahme ist, dass die Wellen an der Grenzfläche $x = 0$ stetig sind, also dass

$$\xi_A(0, t) + \xi_R(0, t) = \xi_T(0, t).$$

Weiter müssen die Kräfte an der Grenzfläche ebenfalls stetig sein, also dass

$$S_1 \frac{\partial}{\partial x}(\xi_A + \xi_R) = S_2 \frac{\partial}{\partial x} \xi_T.$$

Nach rechnen (siehe Serie), erhalten wir den Parameter

$$\alpha = \sqrt{\frac{S_2 \rho_2}{S_1 \rho_1}}.$$

Dieser Parameter gibt an wie stark die Welle reflektiert bzw transmittiert wird. Es gilt für die Parameter δ_R und δ_T :

$$\delta_R = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ \pi & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\delta_T = 0.$$

Hierbei entspricht der Fall von einem "dünnen Ende zu einem Dichten gehen ist $\delta_R = \pi$ und der Fall von einem "dicken Ende zu einem dünnen Ende ist $\delta_R = 0$. Dies entspricht intuitiv der Tatsache, dass die Welle an einem fixen Ende mit einem Phasenunterschied von π reflektiert wird, und an einem offenen Ende ohne Phasenunterschied reflektiert wird.

Für die Amplituden R und T gilt

$$A^2 = R^2 + \frac{v_1}{v_2} T^2.$$

1.3 Stehende Wellen

Wir betrachten nun 2 eindimensionale fortschreitende Wellen welche in entgegengesetzte Richtungen laufen. Es gilt

$$\begin{aligned}\xi_1(x, t) &= A \cos(kx - \omega t) \\ \xi_2'(x, t) &= A \cos(kx + \omega t + \delta).\end{aligned}$$

Wir können die Zweite Welle noch umschreiben zu

$$\xi_2(x, t) = A \cos(-kx - \omega t + \delta_R).$$

Die Superposition der beiden Wellen ist gegeben durch

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right).$$

Wenn wir für die gegenläufige Welle eine Reflexion an einem harten Ende betrachten, so gilt $\delta_R = \pi$. Somit erhalten wir

$$\xi(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

In diesem Fall haben wir bei $x = 0$ und $x = L$ einen Knoten.

Wenn wir für die gegenläufige Welle eine Reflexion an einem offenen Ende betrachten, so gilt $\delta_R = 0$. Somit erhalten wir

$$\xi(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t).$$

In diesem Fall haben wir bei $x = 0$ und $x = L$ einen Bauch.

Für die Energiedichte einer stehenden Welle gilt

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 4A^2 \cos^2(kx) \sin^2(\omega t).$$

Und für die elastische Energiedichte gilt

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} S 4A^2 k^2 \sin^2(kx) \cos^2(\omega t).$$

Wenn man dies plotten würde, so sehen wir, dass die kinetische und elastische Energie sich gegenseitig austauschen, aber dass die Gesamtenergie konstant bleibt.

Bei einer Reflexion am fixen Ende gilt: Für $\omega t = n\pi$ ist $\xi = 0$ und für $\omega t = (n + \frac{1}{2})\pi$ ist ξ maximal und nur elastisch.

Die Einhüllende ist gegeben durch

$$u(x) = a \cos(kx) + B \sin(kx).$$

Bei einer fest eingespannten Saite gilt $u(0) = u(L) = 0$. Dies führt zu der Bedingung

$$\sin(k_n L) = 0.$$

Also $k_n = \frac{n\pi}{L}$, und somit $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$, und die Wellenlänge ist gegeben durch $\lambda_n = \frac{2L}{n}$.

Hierbei sind nur diskrete Werte von k und ω erlaubt, welche als Eigenfrequenzen bezeichnet werden.

Ähnlich ist die Situation bei 2 offenen Enden, wobei die Eigenfrequenzen die gleichen sind, aber die Eigenmoden sich unterscheiden.

Bei nur einer Seite offen, und der anderen Seite geschlossen, so gilt die Bedingung

$$\sin(k_n L) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(k_n L) = 0.$$

Dies führt zu der Bedingung

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}.$$

1.4 Dopplereffekt

Schallwellen sind Longitudinale Druckwellen, welche sich in einem Medium ausbreiten.

Der Dopplereffekt nimmt sich 3 Bezugssysteme zur Hand, dies des Senders, des Empfängers und des Mediums.

Für eine Wahrgenommene Frequenz eines Senders, welcher sich mit der Geschwindigkeit v_Q bewegt, gilt und eines Beobachters, welcher sich mit der Geschwindigkeit v_B bewegt, gilt

$$f' = f_Q \frac{u \pm v_B}{u \mp v_Q}.$$

Wir wollen dies nun motivieren. Dazu betrachten wir zunächst die Situation, dass der Sender sich nicht bewegt,

also $v_Q = 0$ gilt. Die Anzahl Wellenberge für einen ruhenden Beobachter ist

$$n_\lambda = f_Q \Delta t.$$

Die Anzahl Wellenberge für einen bewegten Beobachter ist

$$n'_\lambda = f_Q \Delta + \frac{v_B \cdot \Delta t}{\lambda}.$$

Wobei dies für einen Beobachter gilt, welcher sich auf den Sender zu bewegt. Für einen Beobachter, welcher sich von dem Sender weg bewegt, ist ein Minuszeichen vor dem zweiten Term.

Da die Schallgeschwindigkeit u gegeben ist durch $u = f_Q \lambda$, können wir umformen zu

$$f' = f_Q + f_Q \frac{v_B}{u} = f_Q \frac{u + v_B}{u}.$$

Analog finden wir, wenn sich die Quelle bewegt, dass

$$f' = f_Q \frac{u}{u - v_Q}.$$

Wobei dies für eine Quelle gilt, welche sich auf den Beobachter zu bewegt. Für eine Quelle, welche sich von dem Beobachter weg bewegt, ist ein Minuszeichen vor v_Q .

Index

destruktive Interferenz, 4

Dispersion, 1

Gangunterschied, 4

konstruktive Interferenz, 4

Linkszirkular, 3

longitudinal, 1

Massenbelag, 2

Nullphasenwinkel, 1

Phase, 1

Phasenflächen, 2

Phasengeschwindigkeit, 1

Poynting Vektor, 4

Rechtszirkular, 3

transversal, 1

Welle, 1

Wellenfronten, 2

Wellenlänge, 1

Wellenvektor, 2

Wellenzahl, 1

Zugspannung, 2